Министерство образования Самарской области

АССОЦИАЦИЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ "ИНСТИТУТ НАПРАВО.РУ"

УТВЕРЖДЕНО
Приказ директора
от 07.08.2024 № 012/2/с

Воробьев К.А.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

ОП.01 Элементы высшей математики

Специальность 09.02.10 Разработка компьютерных игр, дополненной и виртуальной реальности
Квалификация: разработчик компьютерных игр, дополненной и виртуальной реальности
Форма обучения: очная
На базе основного общего образования
Срок получения образования: 3 года 10 месяцев

Тольятти, 2024г.

Содержание

1. Назначение и организация практикума 3

2. Состав работ и представление результатов 3

3. Практические работы 3

Работа 1. Предел и устранение разрыва . . . 3

Работа 2. Матрицы и решение системы . . . 4

Работа 3. Векторы и угол между направлениями . . . 5

Работа 4. Производная и исследование изменения . . . 6

Работа 5. Интеграл и накопленная величина . . . 6

Работа 6. Линейная модель и прогноз . . . 7

Работа 7. Сингулярные числа и приближение матрицы . . . 8

4. Комплексное учебное задание 9

5. Термины и понятия 9

6. Использованные источники 9

1. Назначение и организация практикума

Математические расчёты для анализа функций, преобразования координат и построения моделей игровых данных.

Указания предназначены для обучающихся по специальности 09.02.10 «Разработка компьютерных игр, дополненной и виртуальной реальности», квалификация — разработчик компьютерных игр, дополненной и виртуальной реальности.

Компонент	Учебная нагрузка
Индекс и наименование	ОП.01 Элементы высшей математики
Общий объём	66 академических часов
Практические занятия	40 академических часов
Промежуточная аттестация	Дифференцированный зачёт — семестр 4

Перед работой изучаются её исходные данные и проверяемые результаты. Затем выполняются последовательные действия, сопоставляется учебный пример и решаются самостоятельные варианты. Ответ включает ход работы и подтверждение результата. Использование готового примера без выполнения своего варианта не подтверждает освоение действия.

Подготовленные материалы: Таблицы промежуточных вычислений; Графики с единицами и подписями; Проверка невязок и граничных случаев.

2. Состав работ и представление результатов

Работа	Тема и результат
1	Предел и устранение разрыва. Для исходной функции обе последовательности значений стремятся к 6.
2	Матрицы и решение системы. Ответы: А (4;1), Б (3;2), В (4;2).
3	Векторы и угол между направлениями. Косинусы вариантов: 0; 1; −1.
4	Производная и исследование изменения. А: минимум −4 при x=2, максимум 5 при x=5.
5	Интеграл и накопленная величина. Ответы: 11; 27; 9.
6	Линейная модель и прогноз. Прогнозы при x=3: 7;16;0.
7	Сингулярные числа и приближение матрицы. Ошибки: 1 и 4 соответственно.

В отчёте по работе указываются тема, выбранный вариант, исходные данные, ход решения, проверка результата и вывод. У таблиц и графиков указываются названия и единицы измерения, где они применимы. Вопросы самоконтроля помогают объяснить решение. Оценивание проводится по фонду оценочных средств дисциплины.

3. Практические работы

Работа 1. Предел и устранение разрыва

Краткие теоретические сведения

Предел описывает поведение функции около точки, а не только её значение в этой точке. Перед сокращением общего множителя фиксируется исключённое значение аргумента. Непрерывность проверяют сравнением предела со значением функции.

Исходные данные

f(x)=(x²−9)/(x−3), x≠3; контрольные аргументы 2,9; 2,99; 3,01; 3,1.

Порядок выполнения

1. Указать область определения и причину исключения x=3.

2. Разложить числитель на множители; сократить при x≠3.

3. Построить таблицу значений слева и справа от точки.

4. Доопределить функцию и пояснить результат на графике.

Разбор учебного примера

x²−9=(x−3)(x+3); при x≠3 функция равна x+3. Предел при x→3 равен 6; значение f(3)=6 устраняет разрыв. Подстановка в исходную дробь без преобразования даёт неопределённость 0/0 и не является ответом.

Задания для самостоятельного выполнения

Вариант А: (x²−16)/(x−4), x→4.

Вариант Б: (x²−25)/(x−5), x→5.

Вариант В: (x²−1)/(x−1), x→1.

Проверка результата

— Для исходной функции обе последовательности значений стремятся к 6.

— Ответы вариантов: 8; 10; 2.

— Сокращение не должно скрывать исходное исключение из области определения.

Вопросы для самоконтроля

1. Почему 0/0 нельзя считать числом?

2. Чем предел отличается от значения функции?

3. Как доказать непрерывность после доопределения?

Работа 2. Матрицы и решение системы

Краткие теоретические сведения

Элементарные преобразования строк сохраняют множество решений системы. Ведущий элемент выбирают ненулевым; после получения решения проверяют все исходные уравнения. Для обратной матрицы необходимо условие ненулевого определителя.

Исходные данные

Система 3x+y=11, x+y=5. Матрица A=[[3,1],[1,1]], b=[11,5].

Порядок выполнения

1. Записать расширенную матрицу и отметить неизвестные.

2. Вычесть вторую строку из первой и найти x.

3. Найти y из исходного уравнения.

4. Вычислить определитель и обе невязки Ax−b.

Разбор учебного примера

Вычитание даёт 2x=6, следовательно x=3, y=2. Определитель равен 3·1−1·1=2. Невязки:

3·3+2−11=0 и 3+2−5=0; решение единственно.

Задания для самостоятельного выполнения

А: 2x+y=9, x+y=5.

Б: 4x+y=14, x+y=5.

В: 3x+2y=16, x+y=6.

Проверка результата

— Ответы: А (4;1), Б (3;2), В (4;2).

— Обе невязки равны нулю.

— Перестановка строк не меняет решение, но меняет знак определителя.

Вопросы для самоконтроля

1. Что означает нулевая невязка?

2. Когда метод требует перестановки строк?

3. Почему при нулевом определителе нельзя обещать единственное решение?

Работа 3. Векторы и угол между направлениями

Краткие теоретические сведения

Скалярное произведение связывает координаты векторов с углом между ними. При вычислении косинуса необходимо использовать длины обоих векторов; нулевой вектор отдельного направления не задаёт.

Исходные данные

a=(1;2;2), b=(2;1;0). Рассматриваются направления взгляда и движения игрового объекта.

Порядок выполнения

1. Вычислить a·b по координатам.

2. Найти длины a и b.

3. Определить косинус угла и знак произведения.

4. Проверить случай нулевого направления и сформулировать обработку ошибки.

Разбор учебного примера

a·b=4, |a|=3, |b|=√5; cosφ=4/(3√5)≈0,5963. Угол острый. Для вектора (0;0;0) деление на длину недопустимо: требуется сообщение об отсутствии направления.

Задания для самостоятельного выполнения

А: a=(1;0;0), b=(0;1;0).

Б: a=(1;1;0), b=(2;2;0).

В: a=(1;0;0), b=(−2;0;0).

Проверка результата

— Косинусы вариантов: 0; 1; −1.

— Численно полученное значение косинуса должно находиться между −1 и 1.

— Проверка нулевой длины выполняется до деления.

Вопросы для самоконтроля

1. Как определить тупой угол без вычисления арккосинуса?

2. Для чего нормируют направление?

3. В каких случаях угол не определён?

Работа 4. Производная и исследование изменения

Краткие теоретические сведения

Производная характеризует скорость изменения функции. Критические точки определяют из $f'=0$ и точек отсутствия производной; вид экстремума устанавливают по изменению знака производной или второй производной.

Исходные данные

$f(x)=x^3-12x$ на $[-3;3]$.

Порядок выполнения

1. Найти первую и вторую производные.

2. Найти критические точки и составить таблицу знаков.

3. Вычислить значения функции в критических точках и концах отрезка.

4. Различить локальные экстремумы и наибольшее/наименьшее значения на отрезке.

Разбор учебного примера

$f'=3x^2-12$, критические точки -2 и 2. $f''=6x$: при -2 локальный максимум 16, при 2 локальный минимум -16. На концах $f(-3)=9$, $f(3)=-9$; глобальные экстремумы на заданном отрезке также достигаются при -2 и 2.

Задания для самостоятельного выполнения

А: $f=x^2-4x$ на $[0;5]$.

Б: $f=-x^2+6x$ на $[0;6]$.

В: $f=x^3-3x$ на $[-2;2]$.

Проверка результата

— А: минимум -4 при $x=2$, максимум 5 при $x=5$.

— Б: максимум 9 при $x=3$, минимум 0 на концах.

— В: проверить также концы; минимум -2 и максимум 2 достигаются в нескольких точках.

Вопросы для самоконтроля

1. Зачем проверять концы отрезка?

2. Всегда ли $f'=0$ означает экстремум?

3. Что показывает знак второй производной?

Работа 5. Интеграл и накопленная величина

Краткие теоретические сведения

Определённый интеграл вычисляется через первообразную. Знак площади под графиком учитывается алгебраически; физическое толкование требует согласованных единиц.

Исходные данные

Скорость накопления ресурса $r(t)=2t+3$ единицы/с, $0\le t\le 4$. Начальный запас 5 единиц.

Порядок выполнения

1. Найти первообразную r(t).

2. Подставить верхний и нижний пределы.

3. Прибавить начальное значение запаса.

4. Сопоставить результат с площадью трапеции.

Разбор учебного примера

Интеграл от 0 до 4 равен $[t^2+3t]_0^4=28$. Итоговый запас 33. Независимая проверка: средняя скорость (3+11)/2=7, время 4 с, накоплено 28.

Задания для самостоятельного выполнения

А: $r=3t+2$, t от 0 до 2, начальный запас 1.

Б: $r=4$, t от 0 до 5, начальный запас 7.

В: $r=t^2$, t от 0 до 3, начальный запас 0.

Проверка результата

— Ответы: 11; 27; 9.

— Не смешивать начальный запас и приращение.

— Указывать единицу итоговой величины.

Вопросы для самоконтроля

1. Почему первообразная содержит константу?

2. Когда интеграл отрицателен?

3. Как проверить линейную скорость геометрически?

Работа 6. Линейная модель и прогноз

Краткие теоретические сведения

При аппроксимации прямая выбирается по критерию суммы квадратов остатков. Прогноз за пределами наблюдений является экстраполяцией и требует отдельного объяснения ограничений.

Исходные данные

Число объектов x: 0,1,2; время обработки y: 2,5,8 мс.

Порядок выполнения

1. Изобразить точки и предположить вид зависимости.

2. Определить коэффициенты $y=ax+b$.

3. Вычислить остатки и сумму их квадратов.

4. Найти прогноз при $x=3$ и указать предел применимости модели.

Разбор учебного примера

Для данных $y=3x+2$; все остатки нулевые, прогноз 11 мс. Это не доказывает линейность для больших сцен: возможны изменение алгоритма, заполнение памяти и другие режимы

работы.

Задания для самостоятельного выполнения

А: y=1,3,5 при x=0,1,2.

Б: y=4,8,12 при x=0,1,2.

В: y=3,2,1 при x=0,1,2.

Проверка результата

— Прогнозы при x=3: 7;16;0.

— Коэффициент наклона имеет размерность времени на объект.

— Нулевые остатки на трёх точках не заменяют проверку на новых данных.

Вопросы для самоконтроля

1. Чем аппроксимация отличается от интерполяции?

2. Что означает остаток?

3. Почему модель нельзя без проверки переносить на другую платформу?

Работа 7. Сингулярные числа и приближение матрицы

Краткие теоретические сведения

Сингулярные числа равны корням из собственных значений A^TA. Приближение меньшего ранга сохраняет выбранные главные составляющие; ошибка зависит от отброшенных сингулярных чисел.

Исходные данные

A=diag(4;2); требуется приближение ранга 1.

Порядок выполнения

1. Вычислить A^TA.

2. Найти его собственные значения и сингулярные числа.

3. Построить диагональное приближение ранга 1.

4. Вычислить норму Фробениуса разности.

Разбор учебного примера

A^TA=diag(16;4), сингулярные числа 4 и 2. Приближение diag(4;0); ошибка в норме Фробениуса равна 2. Это учебный частный случай диагональной матрицы.

Задания для самостоятельного выполнения

А: A=diag(3;1).

Б: A=diag(5;4).

Проверка результата

— Ошибки: 1 и 4 соответственно.

— Ранг приближения равен 1, если оставлено одно ненулевое диагональное значение.

Вопросы для самоконтроля

1. Почему сингулярные числа неотрицательны?

2. Какая часть информации теряется при уменьшении ранга?

4. Комплексное учебное задание

Постройте расчётную модель движения объекта: задайте направление, функцию скорости и время; найдите перемещение интегрированием, проверьте расчёт численно и представьте ограничения модели. Входные данные: v(t)=2t+1, t от 0 до 3, направление (3;4;0), начальная точка (0;0;0). Перемещение вдоль направления равно 12; конечные координаты (7,2;9,6;0).

Этапы и предъявляемые материалы

Этап	Результат
1	Таблицы промежуточных вычислений
2	Графики с единицами и подписями
3	Проверка невязок и граничных случаев

Выполненная работа представляется с исходными данными, объяснением принятых решений и проверками. Изменения исходного условия согласуются до выполнения расчётов или реализации. При защите обучающийся воспроизводит один основной и один граничный либо отрицательный сценарий и объясняет полученный результат.

Контроль готовности

— Для исходной функции обе последовательности значений стремятся к 6.

— Ответы: А (4;1), Б (3;2), В (4;2).

— Косинусы вариантов: 0; 1; −1.

— А: минимум −4 при x=2, максимум 5 при x=5.

— Ответы: 11; 27; 9.

— Прогнозы при x=3: 7;16;0.

— Ошибки: 1 и 4 соответственно.

5. Термины и понятия

Термин	Содержание
Предел	Значение, к которому стремится функция при приближении аргумента.
Невязка	Разность между левой и правой частями уравнения после подстановки решения.
Производная	Предел отношения приращения функции к приращению аргумента.
Интеграл	Математическая модель накопления величины.
Остаток	Разность наблюдаемого и предсказанного значения.

6. Использованные источники

1. Гилев, В. Г., Элементарные функции, производные, интегралы и начала анализа: учебное пособие / В. Г. Гилев. — Москва: Русайнс, 2024. — 183 с. — ISBN 978-5-466-07848- 0. — URL: https://book.ru/book/955648

2. Гончаренко, В. М., Элементы высшей математики : учебник / В. М. Гончаренко, Л. В. Липагина, А. А. Рылов. — Москва: КноРус, 2024. — 363 с. — ISBN 978-5-406-13414- 6. — URL: https://book.ru/book/954527

3. Дзюба, Т. С., Математика. Практикум: учебное пособие / Т. С. Дзюба. — Москва: Русайнс, 2024. — 202 с. — ISBN 978-5-466-06937-2. — URL: https://book.ru/book/954059

4. Кондурар М. В. Методические указания к практическому занятию по численным методам. Тольятти, 2020. DOI: 10.31483/r-74538. URL: https://phsreda.com/e-articles/133/Action133-74538.pdf